10-й клас

1. Розв'яжіть нерівність $(x^2+1)^2-3(x^2+1)<10$.

Відповідь: $x\in(-2,2)$.

Розв'язання. Уведімо позначення $t=x^2+1$:

$$t^2-3t<10 \Leftrightarrow (t+2)(t-5)<0 \Leftrightarrow -2<t<5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2<x^2+1<5 \Leftrightarrow -3<x^2<4 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x\in(-2,2).$$

2. Попарно різні числа a, b та c задовольняють умову $a^2(b+c)=b^2(c+a)$. Доведіть рівність $c^2(a+b)=a^2(b+c)$.

Розв'язання. Віднімімо від лівої частини заданого рівняння його праву частину:

$$a^2(b+c)-b^2(c+a)=a^2b-b^2a+a^2c-b^2c=ab(a-b)+c(a-b)(a+b)=(a-b)(ab+ac+bc).$$

Таким чином, $(a-b)(ab+ac+bc)=0$, а оскільки за умовою числа попарно різні, тобто $a-b\neq 0$, то $ab+ac+bc=0$. Скористаймося аналогічними викладками ще раз:

$$c^2(a+b)-a^2(b+c)=c^2a-a^2c+c^2b-a^2b=ac(c-a)+b(c-a)(c+a)=(c-a)(ac+bc+ab)=0$$

.

Це й доводить рівність $c^2(a+b)=a^2(b+c)$.

3. На діагоналі BD паралелограма $ABCD$ вибрані точки P та Q таким чином, що $BP=PQ=QD$. Прямі CP та CQ перетинають сторони AB та AD відповідно у точках M та N. Знайдіть відношення $MN:BD$.

Відповідь: $MN:BD=1:2$.

Розв'язання. Проведемо діагональ AC, тоді точка перетину діагоналей O – ділить обидві діагоналі навпіл (рис. 8). Тоді для ΔABC відрізок BO – медіана, а точка P задовольняє умови $BP:PO=2:1$, тобто P – точка перетину медіан ΔABC. Тому CM – також медіана ΔABC, а тому M – середина сторони AB, аналогічно N – середина сторони AD. Тому MN – середня лінія ΔABD, звідси і випливає, що $MN:BD=1:2$.

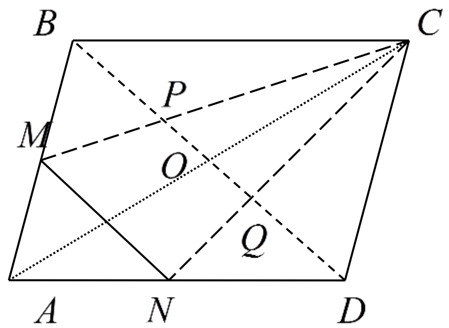

Рис.

4. Якого найменшого значення може набувати сума цифр натурального числа $n=(p^2+2)^2-9(p^2-7)$, де p — просте число?

Відповідь: 4.

Розв'язання. Якщо $p \neq 3$, то p не ділиться на 3, тому $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, звідки $p^2 + 2 \,\vdots\, 3$ та $n \equiv (p^2+2)^2 \equiv 0 \pmod 9$. Сума цифр натурального числа дає ту ж остачу від ділення на 9, що й саме число. При цьому, очевидно, сума не може дорівнювати нулю. Тому, коли $p \neq 3$, сума цифр числа n не менша за 9.

У випадку ж $p = 3$ сума цифр числа $n = (p^2+2)^2 - 9(p^2-7) = 11^2 - 18 = 103$ складає 4.

5. На нараду в Міністерство для обговорення питань олімпіад запросили 30 Заслужених вчителів України з математики, фізики, хімії та біології. Серед запрошених фізиків та біологів разом виявилось удвічі менше ніж математиків, а фізиків та хіміків разом удвічі більше ніж біологів. Скільки на зустріч запросили математиків, якщо вчителів з кожного предмету була різна кількість?

Відповідь: 18.

Розв'язання. Позначимо кількість вчителів математиків, фізиків, хіміків та біологів через $m,\ f,\ h,\ b$ відповідно. Тоді маємо такі умови:

$$\begin{cases} m + f + h + b = 30, \\ f + b = \frac{1}{2} m, \\ f + h = 2b. \end{cases}$$

З другого та третього рівняння маємо: $m = 2f + 2b$ та $h = 2b - f$. Якщо це підставити у перше рівняння, то матимемо, що $2f + 5b = 30$. Оскільки $m,\ f,\ h,\ b$ – цілі невід'ємні числа, то зрозуміло, що b повинно бути парним числом від 0 до 6. Залишилося розглянути ці варіанти.

$b = 0 \;\Rightarrow\; f = 15 \;\Rightarrow\; m = 30 \;\Rightarrow\; h = -15$.

$b = 2 \;\Rightarrow\; f = 10 \;\Rightarrow\; m = 24 \;\Rightarrow\; h = -6$.

$b = 4 \;\Rightarrow\; f = 5 \;\Rightarrow\; m = 18 \;\Rightarrow\; h = 3$.

$b = 6 \;\Rightarrow\; f = 0 \;\Rightarrow\; m = 12 \;\Rightarrow\; h = 12$.

З умов задачі, очевидно, що шуканим є варіант, де $m = 18$.