11-й клас

1. За умови, що дійсні числа x та y задовольняють рівність $\dfrac{x+y}{x+2y}+\dfrac{x-y}{x-2y}=4$, доведіть, що $x^2-y^2\neq 0$, та знайдіть множину можливих значень виразу $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Відповідь: вираз може набувати тільки значення $\dfrac{7}{5}$.

Розв'язання. Співвідношення $\dfrac{x+y}{x+2y}+\dfrac{x-y}{x-2y}=4$ рівносильне системі

$$\begin{cases}(x+y)(x-2y)+(x+2y)(x-y)=4(x+2y)(x-2y),\\ x\neq\pm 2y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-xy-2y^2)+(x^2+xy-2y^2)=4(x^2-4y^2),\\ x\neq\pm 2y\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-4y^2=4x^2-16y^2,\\ x\neq\pm 2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=6y^2,\\ x\neq\pm 2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=6y^2,\\ y\neq 0.\end{cases}$$

Отже, $x^2\neq y^2$, а $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{7y^2}{5y^2}=\dfrac{7}{5}$. Крім того, числа x та y, що задовольняють систему, очевидно, існують: наприклад, $y=1$, $x=\sqrt{6}$. Тому число $\dfrac{7}{5}$ входить до множини можливих значень виразу.

2. Знайдіть усі пари натуральних чисел m та n, які задовольняють рівність

$$4m+10n=n^2+mn+25.$$

Відповідь: $m=4$, $n=3$.

Розв'язання. Рівність можна переписати таким чином:

$$4m+10n=n^2+mn+25\ \Leftrightarrow\ 4m-mn=n^2-10n+25\ \Leftrightarrow\ m(4-n)=(n-5)^2.$$

Числа m та n натуральні, а $(n-5)^2\ldots 0$, тому $4-n\ldots 0$, а n може набувати лише одного з чотирьох значень 1, 2, 3, 4:

— $n=1\ \Rightarrow\ 3m=16$ — розв'язків немає.

— $n=2\ \Rightarrow\ 2m=9$ — розв'язків немає.

— $n=3\ \Rightarrow\ m=4$ — маємо розв'язок (4, 3).

— $n=4\ \Rightarrow\ 0=1$ — розв'язків немає.

3. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника ABC відмітили точку L, відмінну від вершин B та C. Коло, описане навколо трикутника ABL, удруге перетинає пряму AC в точці M, а коло, описане навколо трикутника ACL, удруге перетинає пряму AB в точці N. Доведіть, що точки L, M та N лежать на одній прямій.

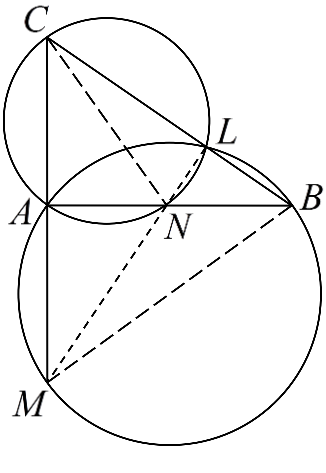

Рис. 1

Розв'язання. Незалежно від того, з якого боку від точки A лежить точка M, $\angle BAM=90^\circ$ (рис. 1). Це значить, що BM — діаметр кола, яке містить точки A, B, L та M. Оскільки L не збігається з точками B, C і, як наслідок, з точкою M, можемо записати, що $\angle BLM=90^\circ$. Аналогічно $\angle CLN=90^\circ$.

Таким чином, точки M та N лежать на перпендикулярі до прямої BC, проведеному з точки L, тобто ці три точки лежать на одній прямій.

4. У кожній комірці таблиці 3×3 записане натуральне число, причому всі дев'ять чисел різні. Відомо, що кожне число є дільником добутку чисел, записаних у сусідніх із цим числом комірках (тобто у комірках, що мають спільну сторону з даною). Яка найбільша кількість чисел серед записаних у таблиці можуть бути простими?

Відповідь: 6.

Розв'язання. Припустимо спершу, що простими можуть виявитися 7 чисел, а не будуть простими, відповідно, щонайбільше 2 числа.

Позначимо записані у комірках таблиці числа, як показано на рис. 2. Просте число не може бути дільником добутку кількох інших простих чисел, тому не станеться такого, щоб у комірці та всіх сусідніх із нею комірках було записано тільки прості числа. Застосувавши це міркування до лівої верхньої комірки таблиці, одержимо, що одне з чисел a, b, d не є простим. Застосувавши те ж міркування до правої верхньої комірки, матимемо, що одне з чисел b, c, f не є простим. Нарешті, застосувавши міркування до комірки з числом h, дістанемо, що не є простим хоча б одне з чисел e, g, h, i.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Рис. 2

Припущення, що число b просте, відразу веде до суперечності, адже тоді мали би принаймні 3 непростих числа: по одному в комірках a, d, у комірках c, f та в комірках e, g, h, i.

Отже, число b непросте. Але з аналогічних міркувань, застосованих для чисел d, f та h у симетричних комірках, випливатиме, що ці числа також не є простими. Тож маємо відразу 4 непростих числа, що також веде до суперечності.

Залишається навести приклад таблиці із шістьма простими числами, яка задовольняла б умову задачі. Такий приклад наведено на рис. 3: a, b, c, g, h, i на рисунку — довільні 6 різних простих чисел, а ag, bh та ci — добутки відповідних пар чисел.

5. Чи існує таке натуральне число n, для яких обидва числа $\frac{2n-5}{9}$ та $\frac{n-2}{15}$ є цілими?

Відповідь: такого натурального числа не існує.

Розв'язання. Припустимо методом від супротивного, що таке n існує, тоді позначимо одержані цілі числа як $m=\frac{2n-5}{9}$ та $k=\frac{n-2}{15}$, тоді $2n=9m+5$ з першої рівності, та $n=15k+2$ з другої. Тоді $2n=9m+5=30k+4$ або $9m+1=30k$, що суперечить подільності на 3.

a	b	c
ag	bh	ci
g	h	i

Рис. 3