8 клас

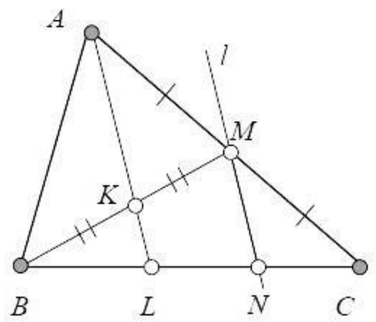
1. Відомо, що ціле число ***n*** не кратне 3. Доведіть, що значення виразу $n^2 + 8$ кратне 3.
   Розв'язання
   Оскільки число n не кратне 3, то при діленні n на 3 можна отримати остачу 1, або 2. Тобто n можна задати виразом: 3k+1, 3k+2.
   Тоді:
   $n^2 + 8 = (3k + 1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 1 + 8 = 9k^2 + 6k + 9 =$
   $=3(3k^2 + 2k + 3)$,
   $n^2 + 8 = (3k + 2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 4 + 8 = 9k^2 + 12k + 12 =$
   $=3(3k^2 + 4k + 4)$.
   Кожний з отриманих виразів кратний 3.

2. В трикутнику АВС точка К є серединою медіани ВМ, а промінь АК перетинає сторону ВС в точці L. Знайти відношення BL:LC.

   Відповідь: 1:2

   Розв'язання

В трикутнику ABC точка K є серединою медіани BM, а промінь AK перетинає сторону BC у точці L. Знайдемо відношення $BL : LC$.



1. Через точку M проведемо пряму l паралельно до прямої AK. Оскільки пряма AK перетинає пряму BC, то за властивістю паралельних прямих l також перетинає пряму BC у певній точці. Позначимо її як N.

2. Розглянемо кут MBC та прямі KL і MN, що перетинають його сторони. Оскільки зазначені прямі паралельні (за побудовою) та відтинають відрізки однакової довжини на стороні BM кута MBC, то за теоремою Фалеса прямі KL та MN відтинають відрізки однакової довжини і на стороні BC кута MBC. Звідки

$$BL = LN.$$

3. Розглянемо кут ACB та прямі AL і MN, що перетинають його сторони. Оскільки зазначені прямі паралельні (за побудовою) та відтинають відрізки однакової довжини на стороні CA кута ACB, то за теоремою Фалеса прямі AL та MN відтинають відрізки однакової довжини і на стороні CB кута ACB. Звідки

$$CN = NL. \tag{8.1.2}$$

З урахуванням рівностей (8.1.1) та (8.1.2), маємо $BL = LN = NC$. Звідки $LC = 2 \cdot BL$. І тому $BL : LC = 1 : 2$.

Відповідь: $1 : 2$.

3. Знайдіть найбільше парне п'ятицифрове число, перші три цифри якого утворюють число, що є точним квадратом, а останні три цифри – точним кубом.
   Відповідь: 62 512

   Розв'язання
   Якщо шукане число – парне, то останні три його цифри також утворюють парне число. З умови відомо, що вони – куб деякого числа. Оскільки 10^3 =1000 – чотирицифрове число, а 4^3 =64, то до кубу підноситься парне одноцифрове число, що більше 4. Це може бути: 8^3 =512, або 6^3 =216.
   Тоді перші три цифри шуканого числа є точним квадратом, який закінчується або 5, або 2 відповідно. Ми знаємо, що квадрат цілого числа не може закінчуватися цифрою 2. Трицифровими квадратами з останньою цифрою 5 є: 225, 625. Отже, шукане число - 62 512.
   Відповідь: 62 512

4. Робочий день зменшився з 8 до 7 год. На скільки процентів треба підвищити продуктивність праці, щоб при тих же розцінках заробітна плата збільшилася на 5%?

   Відповідь: на 20%.

   Розв'язання
   Якщо робочий день тривав 8 год., то продуктивність праці становила $\frac{1}{8}$.
   Нехай для зазначеного збільшення заробітної плати продуктивність праці треба підвищити на x%. Тоді продуктивність праці дорівнюватиме:
   $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{100}\right)$. Продукція, виготовлена за 7 годин: $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{100}\right)\cdot 7$.
   Ця продуктивність становить 105% від попередньої, що обумовить збільшення заробітної плати на 5%:

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{100}\right)\cdot 7 = 1{,}05;\ \frac{7}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right) = 1{,}05;$$

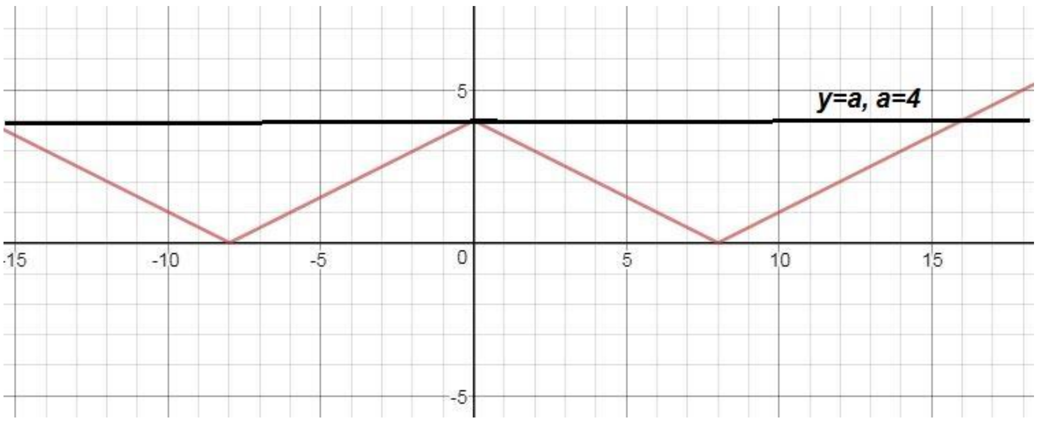
$1+\frac{x}{100}=\frac{1{,}05\cdot 8}{7};\ \frac{x}{100}=0{,}2; x = 20.$ Отже продуктивність праці треба підвищити на 20%.

Відповідь: на 20%.

5. При яких значеннях параметру ***а*** рівняння $\left|\frac{1}{2}|x|-4\right| = a$ має точно три розв'язки?
   Відповідь: *а*=4

   Розв'язання

Побудуємо графіки функцій: $y = \left|\frac{1}{2}|x|-4\right|$, y=*a*, знайдемо їх точки перетину, абсциси яких будуть коренями рівняння.



При a=4 графіки мають три точки перетину.

Відповідь: 4.