

1. Відомо, що ціле число n не кратне 3. Доведіть, що значення виразу $n^2 + 8$ кратне 3.

Розв'язання

Оскільки число n не кратне 3, то при діленні n на 3 можна отримати остачу 1, або 2. Тобто n можна задати виразом: $3k+1$, $3k+2$.

Тоді:

$$n^2 + 8 = (3k + 1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 1 + 8 = 9k^2 + 6k + 9 = 3(3k^2 + 2k + 3),$$

$$n^2 + 8 = (3k + 2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 4 + 8 = 9k^2 + 12k + 12 = 3(3k^2 + 4k + 4).$$

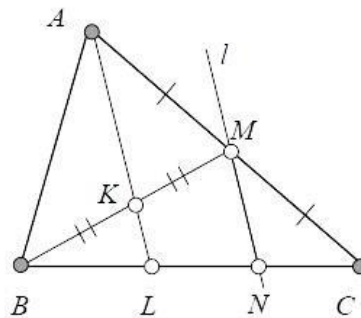
Кожний з отриманих виразів кратний 3.

2. В трикутнику ABC точка K є серединою медіани BM , а промінь AK перетинає сторону BC в точці L . Знайти відношення $BL:LC$.

Відповідь: 1:2

Розв'язання

В трикутнику ABC точка K є серединою медіани BM , а промінь AK перетинає сторону BC у точці L . Знайдемо відношення $BL:LC$.



1. Через точку M проведемо пряму l паралельно до прямої AK . Оскільки пряма AK перетинає пряму BC , то за властивістю паралельних прямих l також перетинає пряму BC у певній точці. Позначимо її як N .

2. Розглянемо кут MBC та прямі KL і MN , що перетинають його сторони. Оскільки зазначені прямі паралельні (за побудовою) та відтинають відрізки однакової довжини на стороні BM кута MBC , то за теоремою Фалеса прямі KL та MN відтинають відрізки однакової довжини і на стороні BC кута MBC . Звідки

$$BL = LN.$$

3. Розглянемо кут ACB та прямі AL і MN , що перетинають його сторони. Оскільки зазначені прямі паралельні (за побудовою) та відтинають відрізки однакової довжини на стороні CA кута ACB , то за теоремою Фалеса прямі AL та MN відтинають відрізки однакової довжини і на стороні CB кута ACB . Звідки

$$CN = NL. \quad (8.1.2)$$

З урахуванням рівностей (8.1.1) та (8.1.2), маємо $BL = LN = NC$. Звідки $LC = 2 \cdot BL$. І тому $BL : LC = 1 : 2$.

Відповідь: $1 : 2$.

3. Знайдіть найбільше парне п'ятицифрове число, перші три цифри якого утворюють число, що є точним квадратом, а останні три цифри – точним кубом.

Відповідь: 62 512

Розв'язання

Якщо шукане число – парне, то останні три його цифри також утворюють парне число. З умови відомо, що вони – куб деякого числа. Оскільки $10^3 = 1000$ – чотирицифрове число, а $4^3 = 64$, то до кубу підноситься парне одноцифрове число, що більше 4. Це може бути: $8^3 = 512$, або $6^3 = 216$.

Тоді перші три цифри шуканого числа є точним квадратом, який закінчується або 5, або 2 відповідно. Ми знаємо, що квадрат цілого числа не може закінчуватися цифрою 2. Трицифровими квадратами з останньою цифрою 5 є: 225, 625. Отже, шукане число - 62 512.

Відповідь: 62 512

4. Робочий день зменшився з 8 до 7 год. На скільки процентів треба підвищити продуктивність праці, щоб при тих же розцінках заробітна плата збільшилася на 5%?

Відповідь: на 20%.

Розв'язання

Якщо робочий день тривав 8 год., то продуктивність праці становила $\frac{1}{8}$.

Нехай для зазначеного збільшення заробітної плати продуктивність праці треба підвищити на $x\%$. Тоді продуктивність праці дорівнюватиме:

$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{100}\right)$. Продукція, виготовлена за 7 годин: $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{100}\right) \cdot 7$.

Ця продуктивність становить 105% від попередньої, що обумовить збільшення заробітної плати на 5%:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{100}\right) \cdot 7 = 1,05; \frac{7}{8} \left(1 + \frac{x}{100}\right) = 1,05;$$

$1 + \frac{x}{100} = \frac{1,05 \cdot 8}{7}$; $\frac{x}{100} = 0,2$; $x = 20$. Отже продуктивність праці треба підвищити на 20%.

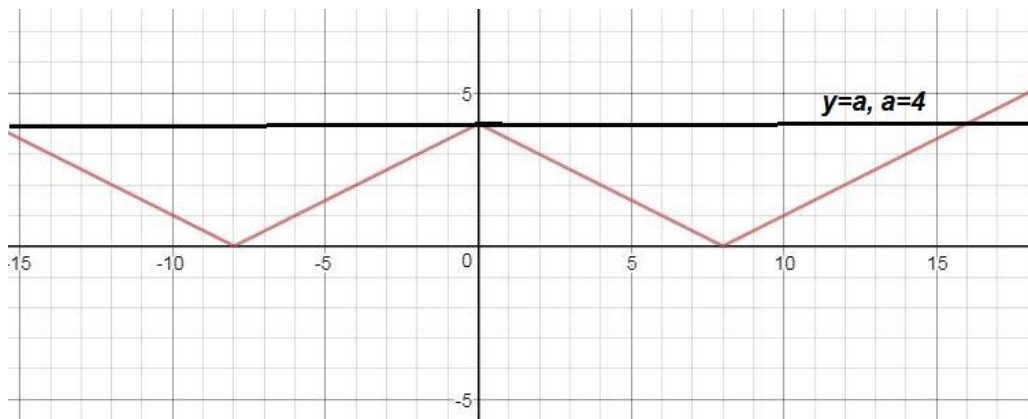
Відповідь: на 20%.

5. При яких значеннях параметру a рівняння $\left|\frac{1}{2}|x| - 4\right| = a$ має точно три розв'язки?

Відповідь: $a=4$

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій: $y = \left|\frac{1}{2}|x| - 4\right|$, $y=a$, знайдемо їх точки перетину, абсциси яких будуть коренями рівняння.



При $a=4$ графіки мають три точки перетину.

Відповідь: 4.