9 клас

1. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях ***n*** значення виразу

$14 \cdot 13^n + 13 \cdot 2^{2n}$ кратне 9.

Розв'язання

$14 \cdot 13^n + 13 \cdot 2^{2n} = 14 \cdot 13^n - 14 \cdot 2^{2n} + 14 \cdot 2^{2n} + 13 \cdot 2^{2n}=$

$= 14 \cdot 13^n - 14 \cdot 4^n + 14 \cdot 2^{2n} + 13 \cdot 2^{2n} = 14(13^n - 4^n) + 27 \cdot 2^{2n}=$

$= 14(13-4)(13^{n-1} + \cdots + 4^{n-1}) + 3 \cdot 9 \cdot 2^{2n}=$

$= 9(14(13^{n-1} + \cdots + 4^{n-1}) + 3 \cdot 2^{2n}) = 9N$

2. Робочий день зменшився з 8 до 7 год. На скільки процентів треба підвищити продуктивність праці, щоб при тих же розцінках заробітна плата збільшилася на 5%?

Відповідь: на 20%

Розв'язання

Якщо робочий день тривав 8 год., то продуктивність праці становила $\frac{1}{8}$. Нехай для зазначеного збільшення заробітної плати продуктивність праці треба підвищити на x%. Тоді продуктивність праці дорівнюватиме: $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{100}\right)$. Продукція, виготовлена за 7 годин: $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{100}\right) \cdot 7$.

Ця продуктивність становить 105% від попередньої, що обумовить збільшення заробітної плати на 5%:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{100}\right) \cdot 7 = 1{,}05;\ \frac{7}{8}\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 1{,}05;$$

$1 + \frac{x}{100} = \frac{1{,}05 \cdot 8}{7};\ \frac{x}{100} = 0{,}2; x = 20$. Отже продуктивність праці треба підвищити на 20%.

Відповідь: на 20%

2. Знайдіть значення параметра ***a***, при яких рівняння

$$(x^2 + (2a-1)x - 2a)(x^2 + (1-a)x - a) = 0$$

має точно три різні корені.

Відповідь: -1; - 0,5; 0; 0,5; 1.

Розв'язання:

1. Не важко перевірити, що:

$x^2 + (2a-1)x - 2a = (x+2a)(x-1)$; $\quad x^2 + (1-a)x - a = (x-a)(x+1)$.

Тому рівняння можна подати у вигляді рівносильного рівняння

$$(x+2a)(x-1)(x-a)(x+1) = 0.$$

Звідки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2a$ та $x_4 = a$ – дійсні корені рівняння

2. Оскільки $x_1 \neq x_2$, то рівняння має **три різні** корені лише в одному з наступних випадків:

$$1)\begin{cases} x_3 = x_4 \\ x_3 \neq x_1 \\ x_3 \neq x_2, \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x_3 \neq x_4 \\ x_3 = x_1 \\ x_4 \neq x_2, \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x_3 \neq x_4 \\ x_3 = x_2 \\ x_4 \neq x_1, \end{cases} \quad 4)\begin{cases} x_3 \neq x_4 \\ x_4 = x_1 \\ x_3 \neq x_2, \end{cases} \quad 5)\begin{cases} x_3 \neq x_4 \\ x_4 = x_2 \\ x_3 \neq x_1. \end{cases}$$

Проаналізувавши усі випадки, отримаємо наступний висновок:

Рівняння має три різних корені при наступних значеннях а: -1; - 0,5; 0; 0,5; 1

Відповідь: -1; - 0,5; 0; 0,5; 1.

4.Доведіть, що для будь-яких додатних чисел ***m, n*** виконується нерівність:

$$(m^3+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n^3}\right) \geq \frac{4m}{n}.$$

Розв'язання:

З теореми Коші маємо:

$m^3 + n \geq 2\sqrt{nm^3}$;

$\frac{1}{m} + \frac{1}{n^3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{mn^3}}$.

Перемножимо праві та ліві частини нерівностей, оскільки числа ***m, n***- додатні, отримаємо:

$$(m^3+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n^3}\right) \geq 4\sqrt{\frac{m^3n}{mn^3}};$$
$$(m^3+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n^3}\right) \geq 4\left|\frac{m}{n}\right|.$$

Оскільки ***m, n***- додатні, то $\left|\frac{m}{n}\right| = \frac{m}{n}$, отже $(m^3+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n^3}\right) \geq \frac{4m}{n}$.

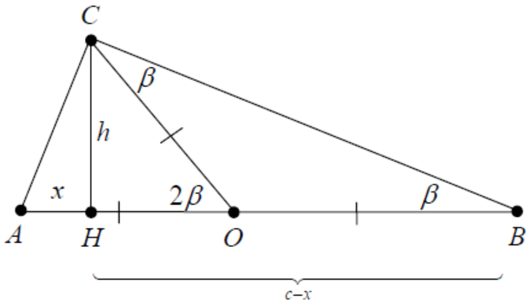
5.Квадрат гіпотенузи у 8 разів більший за квадрат висоти, опущеної з вершини прямого кута. Знайти гострі кути прямокутного трикутника.

Відповідь: 22,5°; 67,5°.

Розв’язання:

Нехай ABC прямокутний трикутник з прямим кутом при вершині C, CH висота, h її довжина $\angle B = \beta$, c довжина гіпотенузи AB, O середина гіпотенузи AB.

I спосіб



1. За умовою $c^2 = 8h^2$, звідки $c = 2\sqrt{2}h$, $\frac{c}{2} = h\sqrt{2}$.

2. За властивістю прямокутного трик-ка $CO = AO = OB = \frac{c}{2} = h\sqrt{2}$.

3. В прямокутному $\triangle CHO$: $CH = h$, $CO = h\sqrt{2}$. Тому за визначенням синуса гострого кута прямокутного трикутника має місце рівність $\sin\angle HOC = \frac{CH}{CO} = h : h\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідки $\angle HOC = 45^0$.

4. $\triangle\ COB$ є рівнобедреним з основою CB. І тому має місце рівність $\angle OCB = \angle OBC = \beta$. Але ж тоді за властивістю зовнішнього кута трикутника COB виконується рівність $\angle HOC = 2\beta$.

А з того що $\angle HOC = 45^0$, маємо $\beta = 22,5^0 = \angle B$. Звідки $\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 22,5^0 = 67,5^0$.

Відповідь: $22,5^0$; $67,5^0$.