

Полтавський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти ім. М.В. Остроградського

Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
11 клас

1. За умови, що дійсні числа x та y задовольняють рівність $\frac{x+y}{x+2y} + \frac{x-y}{x-2y} = 4$, доведіть, що $x^2 - y^2 \neq 0$, та знайдіть множину можливих значень виразу $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.
2. Знайдіть усі пари натуральних чисел m та n , які задовольняють рівність $4m + 10n = n^2 + mn + 25$.
3. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника ABC відмітили точку L , відмінну від вершин B та C . Коло, описане навколо трикутника ABL , удруге перетинає пряму AC в точці M , а коло, описане навколо трикутника ACL , удруге перетинає пряму AB в точці N . Доведіть, що точки L , M та N лежать на одній прямій.
4. У кожній комірці таблиці 3×3 записане натуральне число, причому всі дев'ять чисел різні. Відомо, що кожне число є дільником добутку чисел, записаних у сусідніх із цим числом комірках (тобто у комірках, що мають спільну сторону з даною). Яка найбільша кількість чисел серед записаних у таблиці можуть бути простими?
5. Чи існує таке натуральне число n , для яких обидва числа $\frac{2n-5}{9}$ та $\frac{n-2}{15}$ є цілими?

Час виконання 4 год.