Відповіді до завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2018-2019 н. р.

11 клас

Всі завдання оцінюються по 7 балів кожне.

1. Виписані усі дільники деякого натурального числа, крім одиниці та його самого. Деякі два числа з цього списку відрізняються у шість разів. У скільки разів відрізняються два самих великих числа?

   Розв'язання
   Нехай серед дільників числа N є два числа : a та $6a$, тоді N ділиться на $6a$. Отже ділиться на 2 та на 3. Тоді два найбільших числа у списку – це N/2, N/3. Їх відношення: 3/2.
   Відповідь: 3/2.

2. Нехай α і β гострі кути такі, що $sin^2\alpha + sin^2\beta < 1$. Доведіть, що $sin^2\alpha + sin^2\beta < sin^2(\alpha+\beta)$

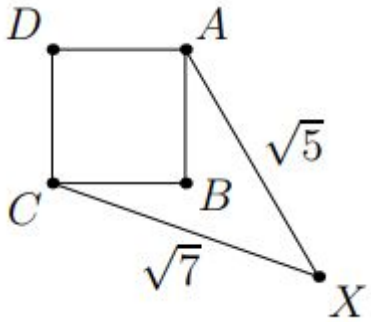
   Розв'язання
   1) Оскільки α і β гострі кути, то значення усіх їх тригонометричних функцій додатні.
      З умови випливає, що $sin^2\alpha < 1 - sin^2\beta = cos^2\beta$ та
      $sin^2\beta < 1 - sin^2\alpha = cos^2\alpha$. Тоді $sin\alpha < cos\beta$ та $sin\beta < cos\alpha$,
   звідки $sin\alpha sin\beta < cos\alpha cos\beta$.
   Отже: $sin\alpha sin\beta - cos\alpha cos\beta < 0$, $\cos(\alpha+\beta) > 0$,
   $0 < \alpha + \beta < 90^\circ$.

   2) Розглянемо різницю між правою та лівою частинами нерівності, що доводиться:
      $sin^2(\alpha+\beta) - sin^2\alpha - sin^2\beta =$
      $= \frac{1-\cos 2(\alpha+\beta)}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2} =$
      $= \frac{cos2\alpha + cos2\beta - (1+\cos 2(\alpha+\beta))}{2} =$
      $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - cos^2(\alpha+\beta) =$
      $= \cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

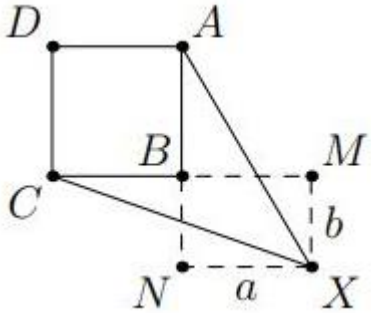
Оскільки функція $y=cos\ x$ на проміжку, що розглядається, спадає, то
$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)>0$;
$\cos(\alpha+\beta)>0$, за доведеним вище, отже
$\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))>0$.
Що і треба було довести.

3. На площині дано квадрат ABCD зі стороною 1 та точка X за межами квадрату. Відомо, що XA=$\sqrt{5}$, XC=$\sqrt{7}$,
Чому дорівнює XB?

Розв'язання
Можливі два випадки розміщення точки B.
1 випадок



Проведемо з точки X перпендикуляри XM та XN на прямі CB та AB відповідно. Чотирикутник BMXN – прямокутник; позначимо довжини його сторін BM та NX за *a*, BN та MX за *в*.



За теоремою Піфагора для трикутників ANX та CMX виконуються умови:

$$AN^2+NX^2=AX^2;$$
$$CM^2+XM^2=CX^2;$$

Отримаємо систему:

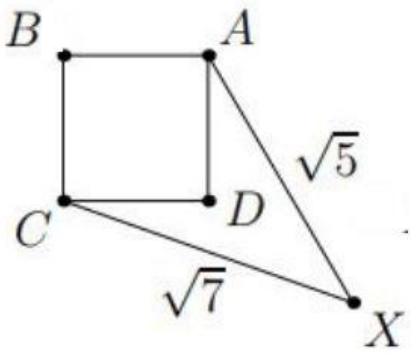
$$\begin{cases}(1+b)^2+a^2=5;\\(1+a)^2+b^2=7.\end{cases}$$

Розв'язком системи буде пара чисел: $a=\sqrt{\frac{5}{2}}; b=\sqrt{\frac{5}{2}}$-1.

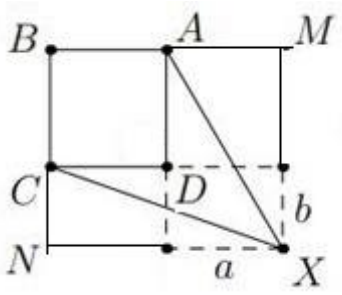
Застосувавши для трикутника BMX теорему Піфагора, отримаємо:

$BX^2 = a^2 + b^2 = 6 - \sqrt{10}$, $BX = \sqrt{6 - \sqrt{10}}$

2 випадок:



Точки M та N будуть розміщені наступним чином:



$$BX^2 = (a+1)^2 + (b+1)^2 = 6 + \sqrt{10}$$

Відповідь: $BX = \sqrt{6 - \sqrt{10}}$ або $BX = \sqrt{6 + \sqrt{10}}$

4. При якому *найбільшому* від'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{|x| - 1} - 2x = a$ має один корінь?

Розв'язання.

ОДЗ рівняння: $|x| - 1 \geq 0,\ x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Запишемо рівняння у вигляді, зручному для графічного розв'язання:

$$\sqrt[4]{|x| - 1} = 2x + a.$$

Побудуємо у одній системі координат графіки функцій:

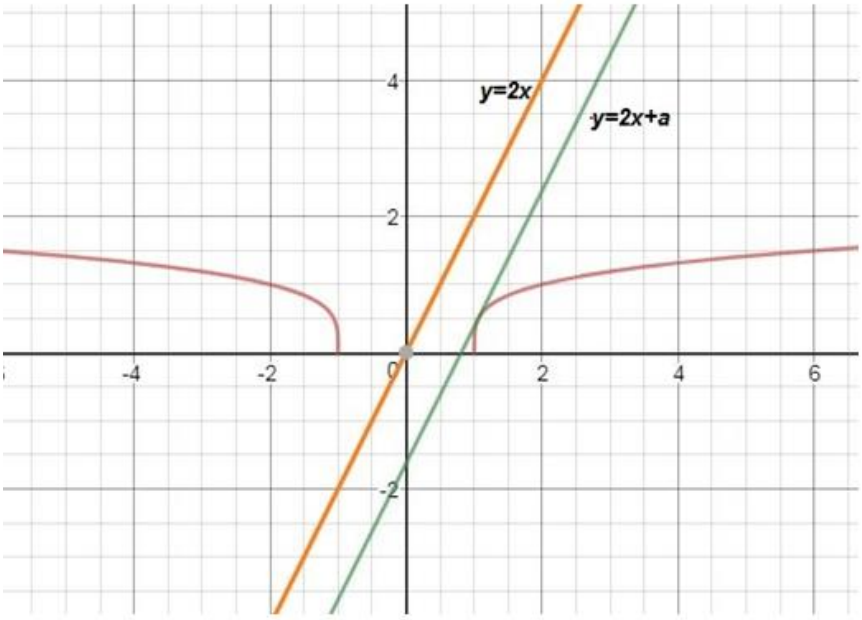
$$y = \sqrt[4]{|x| - 1}; y = 2x + a.$$

Врахуємо, що графік функції y= $2x + a$ утворено паралельним перенесенням графіка y= $2x$ на *a* одиниць вздовж осі ординат. Розмістимо його так, щоб він перетинав

$y = \sqrt[4]{|x| - 1}$ в одній точці, а доданок *a* був від'ємний (у такому разі рівняння матиме один розв'язок за умови від'ємного значення параметра) .

У такому разі графік функції y= $2x + a$ буде дотичною до графіка

$y = \sqrt[4]{|x| - 1}$ при $x \in [1; +\infty)$, де 2 – кутовий коефіцієнт дотичної, який дорівнює значенню похідної функції $y = \sqrt[4]{|x| - 1}$ в точці x_0.



$y = \sqrt[4]{|x| - 1}$,

y= $2x + a$,

y= $2x$.

Якщо *x*>1, то $\sqrt[4]{|x| - 1} = \sqrt[4]{x - 1}$,

$\left(\sqrt[4]{x - 1}\right)' = \frac{1}{4}(x - 1)^{-\frac{3}{4}}$,

$\frac{1}{4}(x - 1)^{-\frac{3}{4}} = 2$;

$(x - 1)^{-\frac{3}{4}} = 8$;

$x - 1 = 8^{-\frac{4}{3}}$; $x_0 = 1\frac{1}{16}$; $y_0 = \frac{1}{2}$. $\left(1\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right)$ - координати точки дотику.

Підставимо їх у рівняння: y= $2x + a$, отримаємо значення *a*= -1, 625.

Відповідь: -1, 625

5. Для додатних чисел x, y, z, t, сума яких дорівнює 4, доведіть нерівність:
$\boldsymbol{\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}+\frac{t}{t+1}\leq 2.}$

Доведення

Оскільки числа x, y, z, t додатні, то виконуються такі нерівності:

$$(x+1)+(y+1)+(z+1)+(t+1)\geq 4\sqrt[4]{(x+1)(y+1)(z+1)(t+1)}$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{t+1}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{y+1}\cdot\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{t+1}}$$

Перемножимо ліві та праві частини нерівності, отримаємо:

$$((x+1)+(y+1)+(z+1)+(t+1))\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{t+1}\right)\geq 16.$$

Оскільки x+y+z+t=4, маємо:

$$8\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{t+1}\right)\geq 16,$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{t+1}\geq 2.$$

$$\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}+\frac{t}{t+1}=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{y+1}\right)+\left(1-\frac{1}{z+1}\right)+\left(1-\frac{1}{t+1}\right)=$$
$$4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{t+1}\right)\leq 4-2,$$

Отже: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}+\frac{t}{t+1}\leq 2.$