Відповіді до завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2018-2019 н. р.

8 клас

Всі завдання оцінюються по 7 балів кожне.

1. Обчисліть значення виразу:

$$\frac{16\cdot 503^2\cdot 2010^2-1}{2011^2}.$$

Відповідь: 4044119.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

$$\frac{16\cdot 503^2\cdot 2010^2-1}{2011^2}=\frac{2012^2\cdot 2010^2-1}{2011^2}=\frac{(2011+1)^2(2011-1)^2-1}{2011^2}=$$

$$=\frac{(2011^2-1)^2-1^2}{2011^2}=\frac{(2011^2-2)\cdot 2011^2}{2011^2}=2011^2-2=4\,044\,119.$$

2. Дійсні числа a, b, c задовольняють умову: $(2b-a)^2+(2b-c)^2=2(2b^2-ac)$. Доведіть, що число b є середнім арифметичним чисел a і c.

Розв'язання. Перенесемо усе в ліву частину, розкриємо усі дужки та зведемо подібні, тоді одержимо такий вираз: $4b^2-4ba-4bc+a^2+2ac+c^2=0$, далі перетвореннями одержимо потрібне: $4b^2-4b(a+c)+(a+c)^2=0$, $(2b-(a+c))^2=0 \Rightarrow b=(a+c):2$, що й треба було довести.

3. Знайдіть всі прості числа, які є одночасно сумами і різницями простих чисел.

Відповідь: 5.

Розв'язання. Оскільки кожне із шуканих простих чисел є сумою двох простих чисел, то воно не менше за 5, а тому є непарним. Звідси випливає, що у кожній сумі простих чисел одним із доданків повинно бути 2, а в кожній різниці – від'ємником 2 (інакше сума простих чисел буде парною). Отже, це числа виду: $p-2$; p; $p+2$. Але з трьох послідовних непарних чисел одне обов'язково ділиться на 3. Тому одне з чисел $p-2$; p; $p+2$ дорівнює 3.

Якщо $p+2=3$, то $p=1$, тобто p – не є простим числом.

Якщо $p=3$, то $p-2=1$, $p-2$ – не є простим числом.

Якщо $p-2=3$, то $p=5$, $p+2=7$, тобто p і $p+2$ – є простими числами.

4. Олеся задумала три різні цифри, а потім на дошці записала усі можливі різні тризначні натуральні числа, десятковий запис кожного з яких містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. З'ясувалося, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які цифри задумала Олеся.

Відповідь: Цифри 0, 7 і 9.

Розв'язання. Нехай a, b, c – цифри, що задумала Олеся. Розглянемо спочатку випадок, коли серед обраних цифр немає нуля. Тоді має бути записано шість попарно різних тризначних чисел: $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}.$ Сума цих чисел становить $222(a+b+c)$, що неможливо, оскільки 3376 не ділиться без остачі на 222. Отже, серед обраних цифр має бути нуль. Нехай $c = 0$ і записані числа мають вигляд $\overline{ab0}, \overline{a0b}, \overline{ba0}, \overline{b0a}.$ Їхня сума дорівнює $211(a+b).$ Тоді $211(a+b)=3376,$ тобто $a+b=16.$ Оскільки цифри a і b мають бути різними, то цими цифрами є 7 і 9.

. **5.** У трикутнику ABC проведено бісектрису AD. На стороні AB позначено точку M так, що $MD \parallel AC$ і $\angle MDA = \angle MDB$. Знайдіть довжину відрізка DC, якщо $AD = 5$.

Відповідь: $DC = 5$.

Розв'язання. З умов задачі $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ADM = \angle MDB = \gamma$, але тоді й $\angle ACD = \gamma$ та $\angle BMD = 2\alpha$ (рис. 5). Тоді $\angle AMD = \angle ADC$, як кути у трикутнику, що мають два рівних кути. Але з іншого боку як суміжні: $\angle AMD = 180° - 2\alpha$, а $\angle ADC = 180° - 2\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$, тому ΔADC -- рівнобедрений і $AD = DC = 5$.

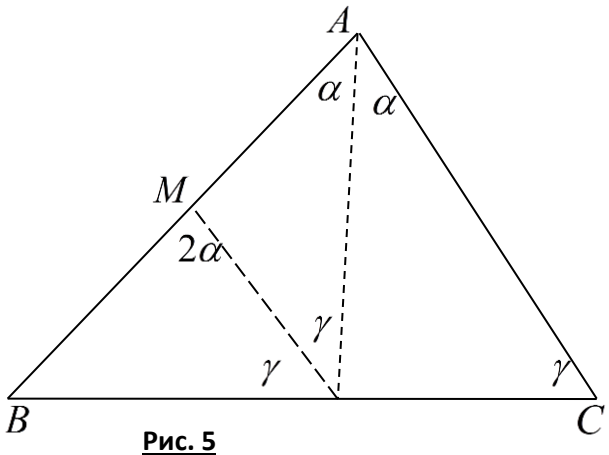

Рис. 5