Відповіді до завдань ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2018-2019 н. р.

9 клас

Всі завдання оцінюються по 7 балів кожне.

1. Розв'яжіть рівняння: $(x-1)\cdot|x^2+1|+|x-1|\cdot(x^2+1)=0$.

***Відповідь*:** $x\le 1$.

***Розв'язання*.** Оскільки $|x^2+1|=x^2+1>0$, то задане рівняння можна переписати у вигляді: $(x-1)+|x-1|=0$, або $|x-1|=-(x-1)$, це рівносильне умові $x-1\le 0$, тобто розв'язком рівняння є множина чисел $x\le 1$.

2. Доведіть, що $(126^{2016}-126)\vdots 630$.

Розв'язання $126^{2016}-126=126(126^{2015}-1)=126(126-1)(126^{2014}-\ldots-1)=$
$=126\cdot 125\cdot(126^{1024}\text{-}\ldots\text{-}1)\vdots 630$.

3. Знайдіть усі натуральні значення n, для яких обидва числа $9n+28$ та $n+5$ є точними квадратами.

***Відповідь*:** $n=4$.

***Розв'язання*.** Нехай деяке число n задовольняє умови задачі, причому $9n+28=x^2$ та $n+5=y^2$, де x та y — цілі і, без втрати загальності, додатні числа. Тоді маємо:

$$(3y+x)(3y-x)=9y^2-x^2=9(n+5)-(9n+28)=45-28=17.$$

Оскільки $3y+x>1$, а 17 — просте число, повинна справджуватися система:

$$\begin{cases}3y+x=17,\\3y-x=1.\end{cases}$$

Звідси відразу знаходимо, що $y=3$, а $n=y^2-5=4$. Перевіркою переконуємось, що значення $n=4$ задовольняє умову задачі.

4. На дошці записано 10 одиниць та 10 двійок. За один хід дозволяється стирати будь-які дві цифри і, якщо вони були однаковими, записати двійку, а якщо різними – одиницю. Якщо остання цифра, що залишається на дошці, - одиниця, то виграє перший гравець, якщо ж двійка, то другий. У кого з гравців виграшна стратегія?

Відповідь: У другого.

***Розв'язання*.** Після кожного ходу кількість одиниць або не змінюється, або зменшується на 2. Оскільки спочатку було парне число одиниць, то одиниця залишитись не може.

5. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Відомо, що центр описаного навколо ΔABC кола збігається із центром кола, що вписане у ΔBCD. Знайдіть кути ΔABC.

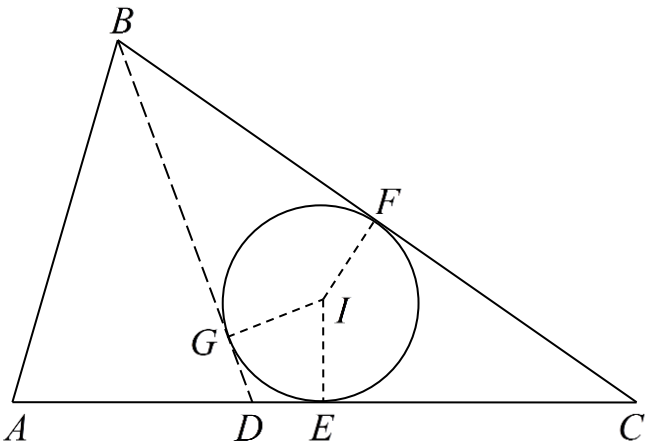

Рис. 5

Відповідь: $\angle A = \angle B = 72°,\ \angle C = 36°.$

Розв'язання. Позначмо спільний центр кіл через I, а точки дотику вписаного у ΔBCD кола до сторін CD, BC і BD через E, F, G відповідно (рис. 5). Відрізки IE та IF — серединні перпендикуляри до сторін AC й BC відповідно, а тому $AE = CE$ та $BF = CF$. Із властивостей дотичних до кола $BG = BF$, $CF = CE$ і $DG = DE$, тому

$$BD = BG + DG = BF + DG = CF + DE = CE + DE = CD.$$

Також маємо, що

$$BC = 2CF = 2CE = AC.$$

Отже, трикутники BDC та ACB рівнобедрені. Звідси маємо, що

$$\angle BAC = \angle ABC = 2\angle DBC = 2\angle BCA \Rightarrow$$
$$180° = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 5\angle BCA \Rightarrow$$
$$\angle BCA = 36°,\ \angle BAC = \angle ABC = 2\angle BCA = 72°.$$