Полтавська районна олімпіада з математики 2019-2020 н.р.

(ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики)

11 клас

Умови та розв’язання

1. За умови, що дійсні числа *x* та *y* задовольняють рівність

$\frac{x+y}{x+2y}+\frac{x-y}{x-2y}=4 $, доведіть, що $x^{2}- y^{2}\ne 0$, та знайдіть множину можливих значень виразу $\frac{x^{2}+y^{2}}{x^{2}-y^{2}}$.

***Відповідь:*** вираз може набувати значення 7/5

***Розв’язання***

Співвідношення $\frac{x+y}{x+2y}+\frac{x-y}{x-2y}=4 $ рівносильне системі

$$\left\{\begin{array}{c}\left(x+y\right)\left(x-2y\right)+\left(x+2y\right)\left(x-y\right)=4\left(x+2y\right)\left(x-2y\right),\\x\ne \pm 2y;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}\left(x^{2}-xy-2y^{2}\right)+\left(x^{2}+xy-2y^{2}\right)=4\left(x^{2}-4y^{2}\right),\\x\ne \pm 2y;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}2x^{2}-4y^{2}=4x^{2}-16y^{2},\\x\ne \pm 2y;\end{array}\right.$$

$\left\{\begin{array}{c}x^{2}=6y^{2},\\x\ne \pm 2y;\end{array}\right.$$\left\{\begin{array}{c}x^{2}=6y^{2},\\y\ne 0.\end{array}\right.$

Отже, $x^{2}\ne y^{2}$ , а $\frac{x^{2}+y^{2}}{x^{2}-y^{2}}=\frac{7y^{2}}{5y^{2}}=\frac{7}{5}. $ Крім того, числа *х* та *у* , що задовольняють систему, очевидно існують: наприклад, *у* = 1, *х* = $\sqrt{6}$ . Тому число 7/5 входить до множини можливих значень виразу.

1. Знайдіть усі пари натуральних чисел *m* та *n*, які задовольняють рівність

$4m+10n=n^{2}+mn+25$.

***Відповідь:***  *m*=4*, n*=3.

***Розв’язання***

Рівність можна переписати таким чином:

$4m+10n=n^{2}+mn+25$;

$4m-mn=n^{2}-10n+25$;

$m\left(4-n\right)=(n-5)^{2}$.

Числа *m* та *n* натуральні, а $(n-5)^{2}\geq 0$ , тому $4-n\geq 0, $а *n* може набувати лише одного з чотирьох значень1, 2, 3, 4:

якщо *n*=1, то 3*m*=16 – розв'язків немає;

якщо *n*=2, то 2*m*=9 – розв'язків немає;

якщо *n*=3, то *m*=4 – маємо розв'язок ( 4;3);

якщо *n*=4, то *0*=1 – розв'язків немає.

1. На гіпотенузі *BC* прямокутного трикутника *ABC* відмітили точку *L*, відмінну від вершин *B* та *C*. Коло, описане навколо трикутника *ABL* , удруге перетинає пряму *AC* в точці *M*, а коло, описане навколо трикутника *ACL*, удруге перетинає пряму *AB* в точці *N*. Доведіть, що точки *L, M* та *N* лежать на одній прямій.

***Розв’язання***



Незалежно від того, з якого боку від точки *А* лежить точка *М*, ∠*ВАМ*=90°. Це значить, що *ВМ* – діаметр кола, яке містить точки *А,В, L* та *М*. Оскільки L не збігається з точками В,С і, як наслідок, з точкою *М*, можемо записати, що кут ∠*ВLМ* =90°. Аналогічно ∠*С LМ*=90°.

Таким чином, точки *М* та *N* лежать на перпендикулярі до прямої *ВС*, проведеному з точки *L* , тобто ці три точки лежать на одній прямій.

1. У кожній комірці таблиці 3х3 записане натуральне число, причому всі дев'ять чисел різні. Відомо, що кожне число є дільником добутку чисел, записаних у сусідніх із цим числом комірках (тобто у комірках, що мають спільну сторону з даною). Яка найбільша кількість чисел серед записаних у таблиці можуть бути простими?

***Відповідь:6***

***Розв’язання***

Припустимо спершу, що простими виявиться 7 чисел, а не будуть простими, відповідно, щонайбільше 2 числа.

Позначимо записані у комірках таблиці числа, яка показано на рис. 1.



Рис. 1 Рис. 2

Просте число не може бути дільником добутку кількох інших простих чисел, тому не станеться такого, щоб у комірці та всіх сусідніх із нею комірках було записано лише прості числа. Застосувавши це міркування до лівої верхньої комірки таблиці, одержимо, що одне з чисел *a, b, d* не є простим.

 Застосувавши те ж міркування до правої верхньої комірки таблиці, матимемо, що одне з чисел *b,c,f* не є простим.

Нарешті, застосувавши міркування до комірки з число *h* , дістанемо, матимемо, що не є простим хоча б одне з чисел *e, g, h, i.*

 Припущення, що число *b* просте, відразу веде до суперечності, адже тоді мали би принаймні 3 непростих числа: по одному в комірках a*, d ,* у комірках *c, f* та у комірках *e,g,h,i.*

Отже, число *b* непросте. Але з аналогічних міркувань, застосованих для чисел d, f та h у симетричних комірках, випливатиме, що ці числа також не є простими. Тож маємо відразу 4 непростих числа, що також веде до суперечності.

Залишається навести приклад таблиці із шістьма простими числами, яка задовольняла б умову задачі. Такий приклад наведено на рис. 2: *a, b, c, g, h, i* на рисунку довільні 6 різних простих чисел, а *ag, bh,* та  *ci* – добутки відповідних пар чисел.

1. Для додатних чисел *a,b,c*, що задовольняють умову $a+b+c\leq \frac{3}{2}$, знайдіть найменше можливе значення виразу $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

***Відповідь:***  $\frac{15}{2}$

***Розв'язання***

Проведемо низку перетворень:

$$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(a+b+c+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq $$

$$\geq 6 \sqrt[6]{a∙b∙c∙\frac{1}{4a}∙\frac{1}{4b}∙\frac{1}{4c}}+ \frac{3}{4}∙3∙\sqrt[3]{\frac{1}{a}∙\frac{1}{b}∙\frac{1}{c}}\geq $$

$$3+\frac{9}{4}∙\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3+\frac{9}{4}∙\frac{1}{(a+b+c)/3}\geq \frac{15}{2} $$

А значення 15/2 досягається, якщо a=b=c=0,5.

Зауважимо, що безпосереднє застосування нерівності між середніми до суми S дає оцінку $S\geq 6, $але значення 6 сума набувати не може.